Вычислительный алгоритм для решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемых сред на перекрывающихся сетках

Текущей целью работы является освоение основных этапов вычислительного алгоритма базовой работы [1] для решения двумерных уравнений Навье-Стокса (НС) для сжимаемых сред в областях сложной формы с использованием перекрывающихся сеток. Рассмотрим сначала задачу о распространении ударной волны (УВ) в плоском канале. Среда – сжимаемый, вязкий, теплопроводный газ, починающийся уравнению состояния идеального газа. Для решения данной задачи рассматривается система уравнений НС в виде: 











Здесь ρ – плотность, u – горизонтальная компонента скорости, v – вертикальная компонента скорости, p – давление, µ - коэффициент вязкости, λ – коэффициент объёмной вязкости, T – температура, Cv – теплоёмкость при постоянном объёме, k – коэффициент теплопроводности.

В настоящей работе для решения предлагается следующая постановка задачи:

1) Расчётная область – прямоугольник (двумерная постановка задачи распространения ударной волны в плоском канале).

2) Граничные условия: на левой грани — сверхзвуковое втекание, на верхней и нижней гранях — условие симметрии, на правой границе — дозвуковое истечение.

Для проведения расчётов необходимо провести дискретизацию уравнений. В данной работе дискретизация осуществляется следующим образом: дискретизация по пространству производится с помощью отображения, задающего сетку, т. Е. Производится дискретизация производится на декартовой сетке, порождающей расчётную сетку, а с помощью дифференциального преобразования эта дискретизация превращается в дискретизацию по нужной нам форме сетки. Дискретизация же по времени производится с помощью явно-неявных схем. Суть этого метода заключается в разделении правой части уравнения на две части, одна из которых решается явным методом, а другая — неявным.





где индекс E – Explicit, явная часть, I – Implicit, неявная часть, v(n) - решение на n-том шаге. Рассматривая уравнения вида используем разделение:



где U0 – решение в некоторый момент времени t0.

Переходя от общих принципов к формулировке конкретной разностной схемы, предлагается начать с ячеек, отдалённых от поверхности тела. Для этих ячеек нет необходимости использовать отображение для дискретизации по пространству, так как ячейки в этой области имеют обычный декартов вид, и соответствующие конечные разности выгладят следующим образом:



Стоит заметить, что использование центральных разностей требует введения в уравнения искусственной вязкости для устранения возникающих неустойчивостей. Искусственная вязкость вводится добавлением в уравнение непрерывности членов, пропорциональных вторым производным, т.е.

где  ­­-соответствующие коэффициенты искусственной вязкости.

Дискретизацию по времени в данном случае можно провести более простым методом, например явным методом Эйлера:

С учётом всех замечаний, разностная схема выглядит следующим образом:

Для численного решения данной системы предлагается построить вычислительную сетку следующим образом: Вычислительная область — прямоугольник с декартовой сеткой 139х199, вокруг цилиндра вторая сетка, расположенная радиально-симметрично с параметрами 101х13. В [1] предлагается следующий алгоритм создания и дальнейшего использования сетки:

Начал разбираться, пока тезисно самое основное, что понял

1. Для построения радиально симметричной сетки необходимо найти преобразование, которое переведет обыкновенную прямоугольную сетку в необходимую нам. В дальнейшем с помощью этого отображения будет построена разностная схема.
2. При наложении двух сеток друг на друга производится процедура их объединения. Выбрасываются точки, которые либо лежат за пределами расчётной области, либо не нужны для проведения процедуры переинтерполяции или дискретизации. От количества точек, которые будут оставлены для процедуры переинтерполяции может зависеть итоговая точность расчётов.
3. Сама процедура переинтерполяции заключается в том, что в местах наложения сеток значения сеточных функций в точках интерполяции не вычисляются согласно разностной схеме, а интерполируются из значений на соседних точках другой сетки.

Литература

1. Chesshire G., Henshaw W.D. Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations // Journal of Computational Physics. – 1990. – V. 90. – P. 1 – 64.